

Dzielenie przez ułamek

Weźmy dla przykładu $\frac{4}{5} : \frac{2}{3}$.

Jak z takim rachunkiem nauczyliśmy się sobie radzić w szkole?

Stosując regułę (algorytm): *Zamiast dzielić – mnoż przez odwrotność.*

$$\frac{4}{5} : \frac{2}{3} = \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{2}$$

Dorastamy z tą regułą i, gdy w czasie rozwiązywania jakiegoś zadania pojawiła się konieczność dzielenia ułamków, to ją stosujemy, zamieniając licznik i mianownik ułamka miejscami.

Dlaczego pomiędzy ilorazem $\frac{4}{5} : \frac{2}{3}$ i iloczynem $\frac{4}{5} \cdot \frac{3}{2}$ można postawić znak równości?

Można dla tej wiary w poprawność szkolnej reguły poszukać uzasadnienia. ☺

Nie ma innej drogi, jak wyjść od $\frac{4}{5} : \frac{2}{3}$ i tak ten iloraz przekształcić, aby dojść do $\frac{4}{5} \cdot \frac{3}{2}$.

Zapiszmy iloraz w postaci „piętrowej”:

$$\frac{\frac{4}{5}}{\frac{2}{3}}$$

Pomnóżmy zarówno licznik, jak i mianownik tego „ułamka” przez ... odwrotność mianownika:

$$\frac{\frac{4}{5}}{\frac{2}{3}} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{2}{3}} \cdot \frac{3}{2}$$

W końcu stosując reguły mnożenia dwóch ułamków dojdziemy do poszukiwanego iloczynu:

$$\frac{\frac{4}{5}}{\frac{2}{3}} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{2}{3}} \cdot \frac{3}{2} = \frac{\frac{4}{5} \cdot 3}{\frac{2}{3} \cdot 2} = \frac{\frac{4}{5} \cdot 3}{1} = \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{2}$$

Wypada jeszcze dokończyć nasze rachunki i stwierdzić, że $\frac{4}{5} : \frac{2}{3}$ daje wynik $\frac{6}{5}$.

W regule *Zamiast dzielić ...* odwołujemy się (bezrefleksyjnie?) do pojęcia **odwrotności** liczby.

Liczbą odwrotną do liczby x , różnej od 0, jest taka liczba y , że $x \cdot y = 1$. Wtedy $y = \frac{1}{x}$.

Oczywiście ta relacja jest symetryczna, tzn. liczbą odwrotną do $\frac{1}{x}$ jest liczba x .

Wykorzystując pojęcie odwrotności liczby, możemy zdefiniować pojęcie dzielenia ułamków.

Założmy, że liczby a , b , c i d są liczbami całkowitymi dodatnimi. Wówczas

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$$

Matematyka to pojęcia i algorytmy (reguły).

Te dwa oblicza matematyki są jak dwie strony jednej monety.