

Adam Marlewski

Wiele ciekawego o liczbach Fibonacciego

Zamiast wstępu

Liczby Fibonacciego należą do tych obiektów (inaczej: pojęć) matematycznych, które są łatwe w percepcji i na które każdy może samodzielnie natrafić – na przykład odpowiadając na pytania, na ile sposobów można wchodzić po schodach. Fascynują od wieków i ciągle stanowią przedmiot dociekań. Mają ciekawą historię. Już sama ich nazwa zadziwia: nazywają się liczbami Fibonacciego, a pierwszy na nie natrafił nie Fibonacci. Kto zatem odkrył te liczby? Gdzie to nastąpiło i kiedy? Odpowiedzi na te pytania udziela niniejszy tekst, pierwszy w tytułowym cyklu.

Kalendarium

ok. 1500 p.n.e.	formuje się sanskryt wedyjski.
ok. 500 p.n.e.	Panini opracowuje <i>Ośmioksiąg</i> .
ok. 300 p.n.e.	Pingala pisze <i>Traktat o prozodii</i> .
ok. 700 n.e.	Virahanka wypisuje wyrazy <i>maatrameru</i> .
ok. 950-1150	rozprawy Pingali i Virahanki komentują Halayudha, Gopala i Hemaczandra.
1202	Leonardo Pisano ogłasza manuskrypt <i>Liber abaci</i> .
1876	Édouard Lucas ciągnie 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ... nazywa ciągiem Fibonacciego.

Część I. Virahanka liczy sylaby, my liczymy schody, widać liczenie nie wyszło z mody

Pan Jourdain (bohater komedii Moliera *Mieszczanin szlachcicem*, której premiera miała miejsce na zamku w Chambord w roku 1670) nie zdawał sobie sprawy, że mówi prozą, że istnieje poezja. Wcale nierzadko bywa, że i nam się przytrafia coś podobnego. Na przykład, nie dostrzegamy, że tak prozaiczna czynność jak wchodzenie po schodach może stać się okazją do zetknięcia się z liczbami, których bogatej historii poświęcony jest niniejszy tekst.

Liczby te są wyrazami ciągów

$$V = (V_m)_{m=1,2,3,\dots} = (1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \dots),$$

$$F = (F_n)_{n=0,1,2,3,\dots} = (0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \dots);$$

przykładowo, ich piątymi wyrazami (tj. elementami o indeksie 5) są $V_5 = 8$ i $F_5 = 5$.

Wyrazy pierwszego z tych ciągów pojawiły się niejawnie około 2300 lat temu w rozważaniach nad pewną cechą języka, jakim wtedy posługiwano się nad Indusem. Około 800 roku, a może nawet dwa wieki wcześniej, liczby, z których składa się ten ciąg, rozpoznał Virahanka (nazwisko to transkrybuje się również jako Virahaanka). W Europie początkowych 13 wyrazów tego ciągu przedstawił w 1202 r. Leonardo Pisano w manuskrypcie *Liber abaci*.

Drugi z tych ciągów, F , od zaledwie 150 lat jest powszechnie zwany ciągiem Fibonacciego, jego wyrazy zwane są liczbami Fibonacciego, a autor *Liber abaci* znany jest jako Fibonacci.

Ciąg V jest z ciągiem F związany (zależnością $F_k = V_{k-1}$ dla każdego indeksu $k \geq 2$) tak ściśle, że również bywa nazywany ciągiem Fibonacciego.

Trzy powyższe cezury czasowe (ostatnią z nich spowodował, można rzec, artykuł opublikowany w roku 1876 przez Édouarda Lucasa) są tymi, na których zogniskowane są kolejne trzy części niniejszego cyklu. Do tych trzech dat dodajemy szereg innych – mianowicie te lata, w których zaobserwowano i wykazano interesujące własności liczb Fibonacciego.

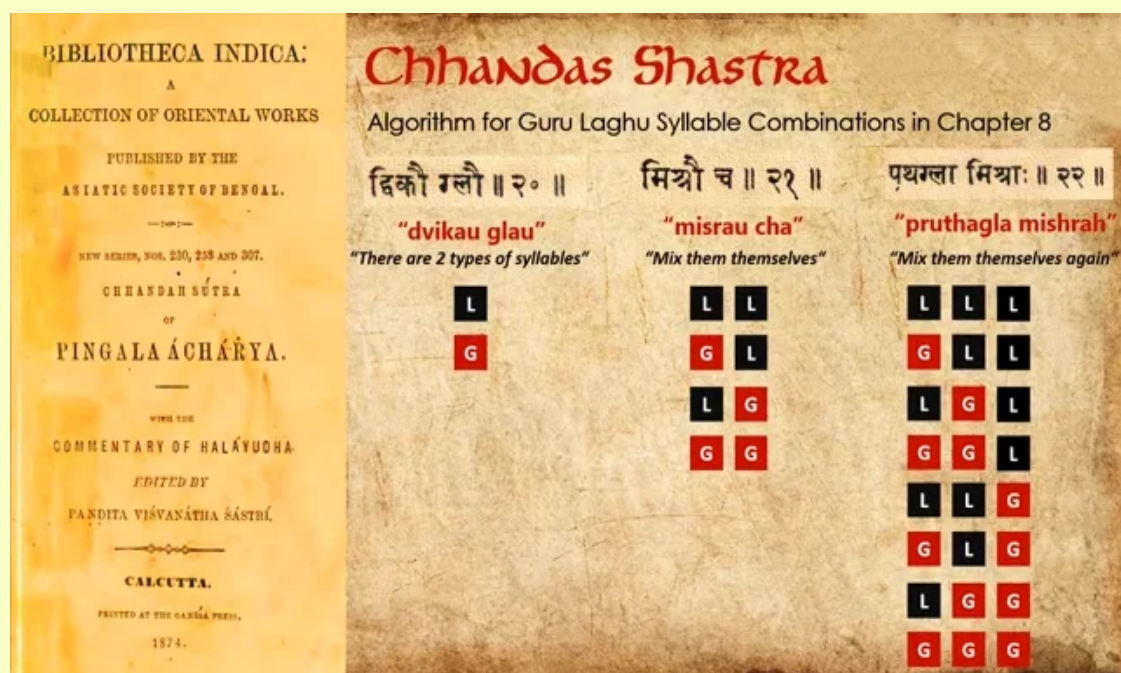
ok. 300 p.n.e., 700 n.e. – Pingala i Virahanka liczą sylaby

Słowo ‘sanskryt’ jest zapożyczeniem (poprzez język angielski) terminu oznaczającego dosłownie ‘język uporządkowany’ (*samskrtam*). Powszechnie oznacza ono nie tylko tzw. sanskryt klasyczny, lecz także jego wcześniejsze warianty. Najstarszy z tych wariantów w literaturze określany jest jako język wedyjski, sanskryt wedyjski. Uformował się on około 3500 lat temu nad Indusem, sam siebie zwał boską mową¹. Sankryt jest najstarszym z języków indoeuropejskich (do tej rodziny językowej zalicza się też język polski). Z upływem wieków wykształciły się z niego takie języki jak

¹ *giirvaāṇa bhaśāa*. Zapisane tu zbitki *ii* oraz *aa* wymawiamy jako jeden dźwięk, dłuższy niż pojedyncze *i* i *a*. Przykładowo słowo शांति, śaanti (pokój umysłu) ma dwie sylaby (śaa, nti) i trwa trzy mory. Wzięty z łaciny termin ‘mora’ oznacza jednostkę trwania wypowiedzi.

hindi – jest on pierwszym językiem 180 milionów osób (a wskutek jego podobieństwa do wielu innych języków jest zrozumiały przez niemal 600 milionów). Około 500 r. p.n.e. mędrzec **Panini** opracował *Ośmioksiąg* – zbiór 3959 reguł gramatycznych, których przestrzeganie stanowi o czyściwości mowy. Wdrożenie tych reguł przekształciło język wedyjski w sanskryt klasyczny.

W dużej mierze o tym, jak brzmi mowa, stanowią jej właściwości prozodyczne, a więc takie jak akcentowanie, intonacja i iloczasy. Z iloczasem mamy do czynienia wtedy, gdy tę samą samogłoskę (a także sylabę) można wymawiać krótko lub długo, gdy czas niezbędny do jej artykulacji trwa jedną morę lub dwie mory. W polszczyźnie iloczasy zanikł w XVII wieku, jest obecny na przykład w angielskim i czeskim. W dawnej grece i w klasycznej łacinie pełnił rolę wręcz kluczową – mówić pięknie i recytować znaczyło nade wszystko melodyjnie operować iloczasem, składać zdania z odpowiednio dobranych sylab krótkich i długich. Ten porządek był bodaj jeszcze ważniejszy w sanskrycie, gdzie sylaby krótkie nazywa się *laghu akśara*, zaś długie – *guru akśara*.



Ryc. 1. Po lewej stronie: strona tytułowa *Traktatu o prozodii* Pingali wzbogaconego o komentarze Halayudhy (wyd. 1874 rok). Po prawej stronie widnieją od góry:

- tytuł rozprawy Pingali transkrybowany jako *Chhandas shastra* (sansk. छन्दस शास्त्र),
- po angielsku: Podany w rozdziale 8 algorytm na kombinację sylab *laghu* (L) i *guru* (G),
- zapis, w piśmie dewanagari, trzech poleceń tego algorytmu – wraz z numeracją (od lewej: २०, २१, २२, tj. 20, 21, 22),
- transkrypcja łacińska tych poleceń (bez ich numeracji),
- przekład tych poleceń na angielski,
- zestaw wszystkich kombinacji sylab krótkich (L) i długich (G), obejmujących kolejno jedną sylabę, dwie sylaby i 3 sylaby.

Druga z tych sutr (nr 21, २१) to polecenie मिश्रौ च, co po polsku znaczy „i zmieszaj je”.

W rozmaitych transkrypcjach zapisujemy brzmienie tego polecenia tak, jak na tej rycinie (tj. *misrau cha*) albo inaczej, np. *miśra ca* (IPA), *mishra ca* (Harvard-Kyoto), zapis w polszczyźnie oddający brzmienie bodaj najbliższe oryginalnemu to *miśrau cza*.

[Rakesh Sharma: sanskritvarta.com/unravelling-pingala-contribution-to-mathematics]

Panini napisał *Ośmioksiąg* w starannie dopieszczonych melodycznie (a dzięki temu łatwiej zapamiętywalnych) sutrach, czyli zwięzłych aforyzmach. Zwięzłość tych sutr sprawia, że trudno je zrozumieć bez objaśnień. Jedną z rozpraw komentujących pod tym względem *Ośmioksiąg* jest *Traktat o prozodii*. Napisał go ok. 2300 lat temu *aaccharja* (nauczyciel, mistrz) **Pingala**. Traktat ten

składa się z 315 sutr, ostatnie z nich dotyczą wersów sylabicznych, czyli linijek tekstu analizowanych pod kątem liczby sylab w nich zawartych. Gdy pod uwagę bierze się to, jak długo taką linijkę się wypowiada i jak układa się jej melodyka, jak przeplatają się w niej sylaby krótkie i długie, to mówimy o wersji matrycznym (sanskryckie *maatras* znaczy czas trwania, mora).

Właśnie na sutrach matrycznych skupiamy uwagę, zwłaszcza na jednej – *miśrau cza* (zob. Ryc. 1) – która stanowi część czterowiersza²

Są dwa typy sylab.
I zmniejszaj je.
Zmieszaj je ze sobą znów.
I wszystko ponów.

Pingala, podobnie jak Panini, swe przemyślenia odnotował bardziej dbając o melodykę fraz niż o ich przejrzystość znaczeniową (ufając zapewne, że czytelnik jest w stanie pojąć ich przekaz).

Wobec tego, że w polszczyźnie nie ma iloczasu, możemy powiedzieć, że odpowiednikami syntaktycznymi sutr Pingali są rytmiczne rymowanki. Przykładem może być następująca:

Weź jeden i dwa.
I zmieszaj je,
I zrób to znów.
I powtarzaj się.

Ten czterowiersz oddaje treść sutr 8.20-23 (na ryc.1 nie widać czwartej z nich, *vasavastrika*). Ich objaśnienia – a zwłaszcza trzeciej z nich, *miśrau cza*, – podjęli m.in. Virahanka (uważa się, że żył w VI, VII lub VIII wieku) i Halayudha w X wieku. Interpretując tę sutrę tak, jak oni, a więc rozumiejąc, iż owym mieszaniem jest dodawanie, i tego faktu nie skrywając – ale jednocześnie pozostawiając czytelnikowi pole do własnych przemyśleń – powyższą rymowankę można zastąpić następującą wersją:

Mamy 1 i 2.
Sumujemy je.
I mamy liczby dwie.
I powtarzamy się.

Theorem (Virahāṅka):

दो दो पुर्वविअप्पे जा मेलविऊण जायए संखा
सा उत्तरमत्ताणं संखाए एस निदेशो। (Prakrit)

द्वौ द्वौ पूर्वविकल्पौ या मेलयित्वा जायते सङ्ख्या।
सा उत्तरमात्राणां सङ्ख्याया एष निर्देशः॥ (Sanskritized)
(वृत्तजातिसमुच्चयः ६.४९)

The next number is created by joining the previous two [numbers]
That indicates the count of the total mātrās.

Ryc. 2. Reguła *miśrau cza* Pingali objaśniona przez Virahanę (sutra ६.४९, tj. 6.49).

Od góry tekst w prakrycie (tj. w używanym od VIII wieku jednym z języków wywodzących się z sanskrytu), w sanskrycie literackim oraz po angielsku: *Następna liczba jest utworzona przez połączenie poprzednich dwóch. Jest ona równa liczbie całkowitej matr.*

[Subhash Kak – *The Virahāṅka-Fibonacci and related sequences*, Chapman University 2022; www.academia.edu/71027275/]

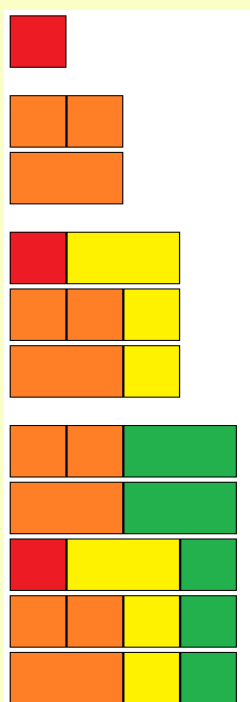
Teraz jest łatwiej wyłuskać, o co chodzi. Najpierw dodajemy 1+2, uzyskując 3. Następnie sumujemy ostatnie dwie liczby i otrzymujemy 2+3=5. Dalej postępujemy analogicznie: dodajemy 3+5=8, potem dodajemy do siebie dwie ostatnie liczby, a że są nimi 5 i 8, więc uzyskujemy 5+8=13. No i kontynuujemy ten proces dowolnie długo. Widać, że nasza rymowanka specyficznie zapisuje metodę (*prataya*), w której ze znanych dwóch liczb (są nimi 1 i 2) uzyskuje się następne liczby (kolejno 1+2=3, 2+3=5, 3+5=8 itd.). Mówiąc językiem matematyki współczesnej: liczby te konstruujemy rekurencyjnie, mianowicie wzorem

$$V_{n+1} := V_n + V_{n-1}, \text{ gdzie } V_1 := 1, V_2 := 2,$$

zaś napis $r := s$ czytamy: wartością r jest odąd s ; r przyjmuje wartość równą s .

² Tu i dalej, dla większej jasności przy poleceniach nie stawiamy znaku wykrzyknika.

W ten sposób uzyskujemy wyżej podany ciąg V . Na odwrót, powyższe przypisanie wartości symbolom V_0 i V_1 oraz rekurencyjne obliczanie każdego następnego wyrazu V_n określają ciąg V . To, że reguła *miśrau cza* jest tą, którą, wychodząc od liczb 1 i 2, oblicza się kolejne liczby ciągu 3, 5, 8, 13, 21, ..., pierwszy expilicite zapisał – ocenia się, że między rokiem 600 a 800 – Virahanka w rozprawie *Wzrost liczebności grupy* (zob. Ryc. 2), która jest komentarzem do dzieła Pingali. Tamże przedmiotowy ciąg nazwał słowem *maatraameru* (stos/ciąg matryczny). Później tak samo jak Virahanka regułę *miśrau cza* zinterpretowali Halayudha (w X wieku), Gopala (przed rokiem 1135) i Hemaczandra (ok. 1150 r.), o którym powiadano, że ogarniał całą ówczesną wiedzę. Co więcej, autorzy ci wskazali, że według tej samej reguły *miśrau cza* można skonstruować zestawienie *meru praastara* (w Europie znany jest jako trójkąt Pascala). Wiedzę o tym, że ciąg V pojawił się w Indiach, że jego obecność antycypował Pingala, zaś stwierdzili ją Virahanka, Halayudha i inni, na Zachodzie rozpowszechnił w roku 1985 Parmanand Singh, matematyk zatrudniony w Raj Narain College w Hadżipurze (Bihar, India). W świetle tych informacji wyżej przytoczonych Pingalę i Virahankę należy uznać za pierwszych odkrywców i badaczy tego ciągu. W literaturze ciąg ten nazywa się ciągiem Fibonacciego i tak zapewne zostanie. I nie będzie to pierwsza tego rodzaju sytuacja, tak jest na przykład z terminami ‘granica Keplera’ i ‘wzór Bineta’ (określenia te poznamy w dalszych częściach niniejszego cyklu).



1. Jest jedno 1-pokrycie: obszar 1×1 wypełnia kwadrat.
Obok ten kwadrat/kafelek zamalowany jest na czerwono.
2. Obszar 2×1 wypełnić można na 2 sposoby: albo umieszczając na nim dwa kwadraty, albo jeden prostokąt. Są dwa 2-pokrycia.
Na ilustracji uwidocznione są kolorem pomarańczowym.
3. Wszystkie 3-pokrycia uzyskujemy z pokrycia o długości 1 (tj. czerwonym kwadratem) i 2-pokryć (tj. kafełkami pomarańczowymi), poszerzając je o kafelek żółty duży (dostawiamy go do kafełka czerwonego) i o kafelek mały (dostawiamy go do pokrycia kafełkami pomarańczowymi). Jak widać, są trzy pokrycia o długości 3.
4. By otrzymać wszystkie 4-pokrycia, powiększamy
każde z 2-pokryć o duży kafelek (tj. prostokąt 2×1)
i każde z 3-pokryć o mały kafelek (tj. kwadrat 1×1).
Te dostawiane/dorysowane kafełki są pokolorowane są na zielono.
Widać, że 4-pokryć jest 5, dwa z nich powstały z 2-pokryć (przez dołożenie dużych kafełków), trzy stanowią poszerzenie 3-pokryć o małe kafełki.

Ryc. 3. Konstrukcja ciągu Fibonacciego
„poprzez dostawianie kafełków pokrywających pas”

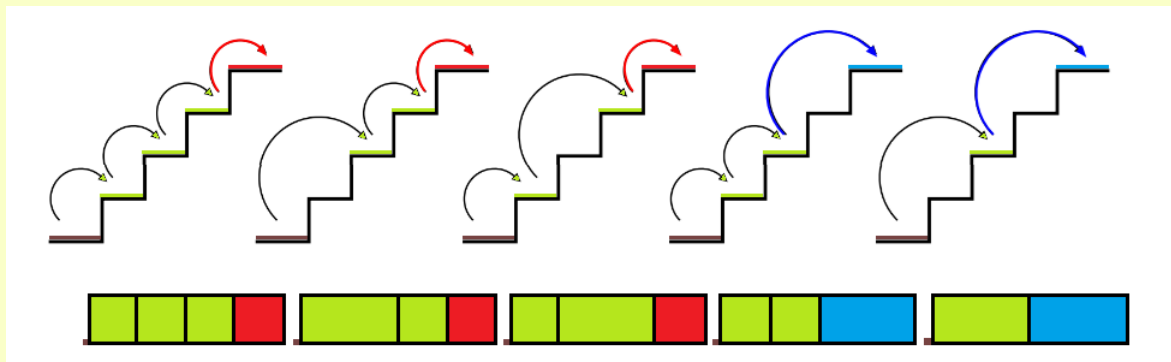
{grafika: Jan Marlewski 2024}

Nie wiemy, jak Pingala doszedł to reguły *miśrau cza*. Wydaje się, że najprostszym sposobem jej sformułowania jest spostrzeżenie, iż wyraz o określonej liczbie mór powstaje z wyrazu trwającego o dwie mory krócej poprzez dopisanie do niego sylaby długiej lub z wyrazu trwającego o jedną morę krócej poprzez dodanie sylaby krótkiej. Ilustruje to Ryc. 3, gdzie sylaby krótkie i długie są pokazane jako kafełki krótkie (tzn. kwadraty 1×1) i długie (tzn. prostokąty 2×1), zaś określenie m -pokrycie oznacza wyraz m -morowy. Kolorystyka poszczególnych kafełków odzwierciedla wzór rekurencyjny – jest tak dobrana, by było widać, jak z już utworzonych dwóch układów/aranżacji uzyskać wszystkie układy o danej długości.

Dla osób mówiących po polsku (i, podobnie dla każdego, którego język ojczysty nie rozróżnia iloczasu) rozważania Pingali i komentatorów jego *Traktatu o prozodii* są zapewne bardziej zawiłe niż odnotowana przed chwilą interpretacja; zgodnie z nią n -ty wyraz V_n ciągu V jest liczbą różnych pokryć prostokąta o długości n kafełkami o długościach 1 i 2.

Wchodzimy po schodach, naraz przeskakując co najwyżej jeden stopień

Podobnych interpretacji jest mnóstwo. Jest V_n liczbą sposobów, na jakie można wejść na n -ty stopień schodów, gdy z każdym krokiem wchodzimy o jeden stopień wyżej lub, ewentualnie, od razu o dwa stopnie („przeskakując” stopień pośredni) – zob. Ryc. 4.



Ryc. 4. Wszystkie pięć sposobów wejścia na czwarty stopień schodów, stąpając na każdy kolejny stopień lub pomijając go drugi. Wchodzenie rozpoczynamy na stopniu brązowym (to stopień nr 0), poruszamy się po schodach zielonych i docieramy na stopień czwarty. Jest on pokolorowany na czerwono lub niebiesko w zależności od tego, czy krok na nim się kończący był krótki/zwyczajny (tzn. weszliśmy ze stopnia nr 3) czy był duży/podwójny (tzn. wykonany ze stopnia nr 2). Poniżej schematycznych schodów pokazane są – odpowiadające sposobom wejścia – pokrycia pasa 4×1 kafelkami małymi (1×1) i dużymi (2×1). Ilustrację sporządzono korzystając z obrazka zamieszczonego na stronie math.stackexchange.com/questions/789804/how-many-distinct-ways-to-climb-stairs-in-1-or-2-steps-at-a-time.

O rycinach 3 i 4 powiadamy, że ukazują graficznie usytuowanie sylab krótkich i długich, różne schematy wejścia po schodach oraz różne pokrycia prostokąta kafelkami. Zamiast przedstawić graficznych możemy przykładowo wchodzenie po schodach zapisać

- literowo: wejście o 1 stopień oznaczamy literą m (m jak mały krok w górę), a o 2 stopnie – literą D (jak duży krok) i pokazane na rycinie 4 kolejne schematy kodują się jako mmmm, Dmm, mDm, mmD, DD.
- cyfrowo: zamiast m i D piszemy odpowiednio 1 i 2, w ten sposób wejścia po schodach (i tak samo pokrycia prostokąta 4×1 kafelkami) pokazane na Ryc. 4 zanotowane są liczbami 1111, 211, 121, 112, 22;
odnotujmy od razu, że suma cyfr każdej z tych liczb jest równa 4, tzn. jest równa liczbie schodów (a także długości prostokąta pokrywanego kafelkami),
- ciągowo, tzn. ciągami jedynekowo-zerowymi (czyli takimi, których wyrazy nie przyjmują wartości innych niż 1 i 2): powyższe liczby traktujemy jako skrócony zapis ciągów i pomiędzy kolejne cyfry wstawiamy przecinki; przykładowo przed chwilą zapisane kody 1111, 211, 121, 112, 22 zastępujemy ciągami (1,1,1,1), (2,1,1), (1,2,1), (1,1,2), (2,2).

Résumé

W tym miejscu kończymy nasze pierwsze spotkanie z liczbami Fibonacciego. Wiemy, jakie są to liczby. Zauważyliśmy, że pojawiają się wtedy, gdy chcemy bardzo szczegółowo opisać różne wejścia po schodach (czasem przeskakując co drugi stopień) oraz pokrycia ścieżki płytkami krótkimi i długimi (mówi się też: kwadratami i kostkami domina). Odnotowaliśmy, że rzecz można pokazać graficznie, zapisać literowo, cyfrowo oraz ciągowo. Dojrzeliliśmy, że sposoby wchodzenia po schodach oraz schematy kafelkowania pasa są matematycznie równoważne strukturze matrycznej (tzn. analizowanej ze względu na układ sylab krótkich i długich), którą rozważali Pingala i Virahanka.

Tak więc znamy odpowiedzi na pytania postawione na początku tego artykułu. Niektóre z nich są pobieżne – zwłaszcza te dotyczące samego Fibonacciego. Kim był? W jaki sposób zaistniał w literaturze przedmiotu? Kwestie te omówimy w następnych częściach cyklu, spotkamy w nich m.in.. króliki w Pizie oraz Wielką Piramidę w Gizie.