SUMY PIERWIASTKÓW

PETER BRAZA

Wprowadzenie

Wszyscy znamy wzory na sumy potęg pierwszych n liczb naturalnych. Przykładowo:

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2},$$
$$1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

A co z sumami takimi, jak

$$\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\ldots+\sqrt{n} \quad \text{lub} \quad \sqrt[3]{1}+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}+\ldots+\sqrt[3]{n}?$$

Czy istnieją stosunkowo proste wzory dla takich sum? W tym artykule pokażemy (niemal) elementarną metodę znajdowania przybliżonych wartości takich sum. Metoda ta opiera się na narzędziach rachunku różniczkowego i całkowego, m.in. na wykorzystaniu szeregów asymptotycznych.

Metoda

Rozważmy najpierw sumę

$$S(n)=\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\ldots+\sqrt{n}. \tag{1}$$

Czy da się znaleźć wzór na tę sumę stosując metody podobne do tej, której użył Gauss, gdy jako mały chłopiec obliczył sumę pierwszych 100 liczb naturalnych? Aby wyliczyć sumę

$$1+2+3+\ldots+98+99+100$$

Gauss połączył składniki w pary: 1 i 100, 2 i 99, 3 i 98 itd., uzyskując 50 par liczb, z których każda sumowała się do 101, co dało wynik 5050 [1]. Niestety sumy (1) nie można wyznaczyć metodą indukcyjną ani teleskopową, które stosuje się do znajdowania sum potęg liczb naturalnych o wykładnikach całkowitych równych 2 lub większych, zob. [1].

Jako pierwszy krok w kierunku wyznaczania wzoru na $S(n)$ rozważmy całkę

$$\int_0^n \sqrt{x}\,dx. \tag{2}$$

Dlaczego ta całka? Ponieważ odpowiadająca jej suma Riemanna jest równa sumie $S(n)$, gdy przedział całkowania podzielimy na równe części długości 1. Zatem możemy się spodziewać, że znajomość wartości całki (2) pozwoli nam uzyskać pewne informacje na temat zachowania się funkcji $S(n)$. Ponieważ wartość całki (2) wynosi $\frac{2}{3}n^{3/2}$, więc otrzymujemy następujące przybliżenie:

$$\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\ldots+\sqrt{n}\approx\frac{2}{3}n^{3/2}.$$

Symbol $\approx$[1] oznacza „dąży asymptotycznie do" tj. iloraz $\frac{S(n)}{\frac{2}{3}n^{3/2}}$ dąży do 1, gdy $n\to\infty$. Aby sprawdzić dokładność tego przybliżenia, możemy porównać wartości $S(n)$ oraz $\frac{2}{3}n^{3/2}$ dla kilku wartości n (Tabela 1).

Nasza początkowa intuicja, łącząca sumę z odpowiadającą jej całką, wydaje się obiecująca. Jednak różnica między rzeczywistymi wartościami sum a ich całkowymi przybliżeniami rośnie wraz ze wzrostem n, a w ilorazie $\frac{S(n)}{\frac{2}{3}n^{3/2}}$ utrzymuje się stały błąd (rzędu $n^{1/2}$)[2].

[1] Komentarz tłumacza: W oryginalnej wersji artykułu autor używa w tym miejscu symbolu $\sim$, co powoduje konflikt z notacją używaną w dalszej części artykułu, zob. (3).

[2] Komentarz tłumacza: Autor artykułu napisał, że błąd jest rzędu $0,7n$. W rzeczywistości błąd jest rzędu $n^{1/2}$, o czym łatwo można się przekonać wykonując kilka eksperymentów na komputerze.

n	$S(n)$	$\frac{2}{3}n^{3/2}$	$\frac{S(n)}{\left(\frac{2}{3}n^{3/2}\right)}$
10	22.4683	21.0819	1.06576
100	671.463	666.667	1.00719
1000	21097.5	21081.9	1.00074
10000	666716	666667	1.00007

Tabela 1. Porównanie wartości $S(n)$ oraz $\frac{2}{3}n^{3/2}$ dla $n = 10, 100, 1000$. Wartości w tabeli zostały wyznaczone przy pomocy komputera.

Powyższe obserwacje prowadzą do wniosku, że powinniśmy skonstruować *szereg asymptotyczny* $A(n)$, który zawiera wyraz $\frac{2}{3}n^{3/2}$ oraz dodatkowe poprawki, które będą coraz lepiej przybliżały sumę $S(n)$. Mówiąc bardziej formalnie, definiujemy szereg asymptotyczny $A(n)$:

$$S(n) = \sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \ldots + \sqrt{n} \sim A(n)^{3}, \tag{3}$$

gdzie $A(n)$ jest postaci

$$A(n) = \sqrt{n}\left(\frac{2}{3}n + a_0 + \frac{a_1}{n} + \frac{a_2}{n^2} + \frac{a_3}{n^3} + \ldots\right) + z. \tag{4}$$

Pierwszy wyraz powyższego szeregu pochodzi od całki (2), a współczynniki a_k pozostają do wyznaczenia. Powód oznaczenia ostatniego składnika jako z zostanie ujawniony w jednej z następnych sekcji.

Wyznaczanie współczynników

Zaczynijmy od obserwacji, że dla każdego $n \geq 2$, mamy

$$S(n) - S(n-1) = \sqrt{n},$$

co prowadzi do przybliżenia

$$A(n) - A(n-1) \sim \sqrt{n}. \tag{5}$$

Wykorzystamy teraz (5) wraz z (4) do wyznaczenia pierwszych kilku wyrazów szeregu $A(n)$. Pozwoli to na dokładniejsze obliczenie sumy $S(n)$.

Pierwszą komplikacją przy obliczaniu różnicy $A(n) - A(n-1)$ jest to, że $A(n)$ zapisane jest w postaci szeregu potęgowego względem $\frac{1}{n}$, podczas gdy

$$A(n-1) = \sqrt{n-1}\left(\frac{2}{3}(n-1) + a_0 + \frac{a_1}{n-1} + \frac{a_2}{(n-1)^2} + \frac{a_3}{(n-1)^3} + \ldots\right) + z$$

jest szeregiem potęgowym względem $\frac{1}{n-1}$, przez co poszczególne wyrazy nie są od razu zgodne i nie można ich zredukować. Aby sobie z tym poradzić, rozwiniemy każdy z wyrazów $A(n-1)$ w szereg Taylora względem n przyjmując, że n jest duże. Na przykład dla dużych wartości n rozwinięcie Taylora dla $\sqrt{n-1}$ wynosi

$$\sqrt{n-1} = \sqrt{n}\sqrt{1 - \frac{1}{n}} = \sqrt{n}\left(1 - \frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^2} - \frac{1}{16n^3} - \ldots\right).$$

Ponadto,

$$\frac{1}{n-1} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{n}}\right) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} + \ldots,$$

a także

$$\frac{1}{(n-1)^2} = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^3} + \frac{3}{n^4} + \ldots.$$

[3]Komentarz tłumacza: Symbol $\sim$ należy rozumieć w następujący sposób: dla każdego $k = 0, 1, 2, \ldots$ zachodzi

$$\lim_{n\to\infty}\left(\left|S(n) - z - \sqrt{n}\left(\frac{2}{3}n + a_0 + \frac{a_1}{n} + \cdots + \frac{a_k}{n^k}\right)\right| \Big/ \frac{\sqrt{n}}{n^{k+1}}\right) = 0,$$

gdzie współczynniki $a_0, a_1, \ldots$ są takie jak w (4).

Wyrazy wyższych rzędów w $A(n-1)$ znajdujemy w podobny sposób, korzystając z rozwinięcia Taylora. Ostatecznie po zastosowaniu wszystkich rozwinięć w szeregi Taylora, różnica $A(n)-A(n-1)$ przyjmuje postać

$$\begin{aligned} A(n)-A(n-1) = \sqrt{n} &+ \frac{2a_0-1}{4}\cdot\frac{1}{n^{1/2}} \\ &+ \frac{3a_0-1-12a_1}{24}\cdot\frac{1}{n^{3/2}} \\ &+ \frac{4a_0-1-24a_1-96a_2}{64}\cdot\frac{1}{n^{5/2}}+\dots. \end{aligned}$$

Kluczowym punktem dowodu jest poczyniona wcześniej obserwacja, że $A(n)-A(n-1)\sim\sqrt{n}$, co oznacza, że możemy przyjąć, że współczynniki występujące w rozwinięciu przy wyrazach postaci $\frac{1}{n^{k+1/2}}$, dla $k=0,1,2,\dots$ są równe zero. Zatem

$$a_0=\frac{1}{2},\quad a_1=\frac{1}{24},\quad a_2=0.$$

Aby zachować czytelność w powyższych obliczeniach, pominięto wyrazy wyższych rzędów $\left(\frac{1}{n^{7/2}},\frac{1}{n^{9/2}},\dots\right)$. Jednakże, gdy współczynniki tych wyrazów również przyrównamy do zera, to otrzymamy

$$a_3=\frac{-1}{1920},\quad a_4=0,\quad a_5=\frac{1}{9216}.$$

Podsumowując, na tym etapie otrzymaliśmy następujące wyrażenie na $A(n)$:

$$A(n)\sim\sqrt{n}\left(\frac{2}{3}n+\frac{1}{2}+\frac{1}{24n}-\frac{1}{1920n^3}+\frac{1}{9216n^5}+\dots\right)+z. \tag{6}$$

Współczynniki przy wyrazach wyższych rzędów można łatwo wyznaczyć[4], jednak obliczenia te najwygodniej jest wykonać przy pomocy programów takich jak Mathematica [2]. (Autor wykorzystał to oprogramowanie do obliczenia współczynników aż do a_{19}). Niemniej jednak, wyrazy wyższych rzędów w $A(n)$ nie mają dużej wartości praktycznej przy aproksymacji $S(n)$, ponieważ błąd w $A(n)$ po użyciu tylko dwóch pierwszych wyrazów jest rzędu $1/\sqrt{n}$, a po uwzględnieniu trzech pierwszych wyrazów błąd jest rzędu $1/n^{5/2}$ — co daje bardzo dokładne oszacowanie!

Warto zauważyć, że rozwinięcie (6) można również uzyskać, korzystając ze *wzoru sumacyjnego Eulera-Maclaurina* — bardziej zaawansowanej techniki matematycznej, która wykracza poza zakres zagadnień omawianych w tym artykule, zob. [3].

Na podkreślenie zasługują też następujące dwa fakty:

(1) Wszystkie współczynniki występujące przy wyrazach postaci $\frac{1}{n^{2k+1/2}}$, dla $k=1,2,3,\dots$, są równe zero. Powód znikania tych współczynników nie jest jasny dopóki nie przyjrzymy się dokładniej współczynnikom pochodzącym od rozwinięć w szeregi Taylora. Można to również wykazać korzystając ze wzoru sumacyjnego Eulera-Maclaurina[5].

(2) Pierwsze dwa wyrazy $A(n)$ w (6) są dokładnie tymi samymi wyrazami, które otrzymuje się, gdy zastosuje się metodę trapezów z krokiem całkowania równym 1 do aproksymacji całki (2). Otrzymujemy

$$S(n)\approx\int_0^n\sqrt{x}\,dx+\frac{1}{2}\sqrt{n}=\sqrt{n}\left(\frac{2}{3}n+\frac{1}{2}\right),$$

zob [4]. W istocie pozostałe wyrazy w (6) to trudne do uchwycenia wyrazy opisujące błąd reguły trapezów dla dużych wartości n.

[4]Uwaga tłumacza: Kolejne współczynniki występujące w rozwinięciu 4 oraz 6 można wyliczyć z tzw. wzorów Faulhabera: $a_k=\binom{s+1}{k}B_k$, gdzie B_k jest k-tą liczbą Bernoulliego, a $\binom{s+1}{k}=\frac{(s+1)s(s-1)\cdots(s+1-(k-1))}{k!}$ jest uogólnionym symbolem Newtona zdefiniowanym dla dowolnego rzeczywistego s i całkowitego $k\geq 0$.

[5]Uwaga tłumacza: Ten fakt można łatwo wytłumaczyć korzystając ze wzorów *Faulhabera* (zob. poprzednią uwagę tłumacza) na kolejne współczynniki rozwinięcia (4) i (6). Mianowicie wynika to z faktu, że dla liczb Bernoulliego zachodzi $B_{2s+1}=0$, dla $s\geq 1$.

Wyznaczenie z

Interesującym aspektem na tym etapie jest fakt, że mamy procedurę pozwalającą wyznaczyć współczynniki a_k w wyrażeniu $A(n)$, jednak ta procedura nie pozwala na określenie wartości z. Dzieje się tak, ponieważ podczas obliczania różnicy $A(n) - A(n-1)$ wyrazy równe się redukują. Jak zatem znaleźć z?

Tabela 2 przedstawia pierwsze kilka wyrazów $A(n)$ (bez z) dla $n = 10$; daje nam to dobrą intuicję dotyczącą możliwej wartości liczbowej z. Warto zauważyć, że przybliżona wartość z w wyrażeniu $A(n)$ jest w przybliżeniu taka sama niezależnie od tego, jakie n zostanie użyte; Tabela 2 wskazuje, że jej wartość wynosi około -0.207886225.

Liczba wyrazów $A(n)$	3	4	5
$A(10)$	22.6761660548	22.6761644078	22.6761644112
$z \approx S(10) - A(10)$	-0.2078878687	-0.2078862216	-0.2078862250

Tabela 2. Dla $n = 10$ mamy $S(10) = 22.4682781862$.

Głównym celem tego artykułu jest zastosowanie elementarnych technik do uzyskania możliwie dokładnych przybliżeń sum postaci $\sqrt{1} + \sqrt{2} + \ldots + \sqrt{n}$. Jak dotąd, udało się w dużej mierze osiągnąć ten cel. Jednak, aby określić dokładną wartość z w rozwinięciu (6), musimy zastosować bardziej zaawansowane narzędzia matematyczne. Otóż, okazuje się, że

$$z = \zeta\left(-\frac{1}{2}\right),$$

gdzie ζ jest *funkcją dzeta Riemanna*. Wyjaśnienie tego faktu zostało przedstawione w Dodatku, aby zachować elementarny charakter głównej części pracy. Przybliżając wartość $\zeta\left(-\frac{1}{2}\right)$ z dokładnością do dwudziestu miejsc po przecinku otrzymamy $\zeta\left(-\frac{1}{2}\right) \approx -0.20788622497735456602$, co jest zgodne z wartościami w Tabeli 2.

Podsumowując, otrzymaliśmy przybliżenie

$$\begin{aligned} &\sqrt{1}+\sqrt{2} + \ldots + \sqrt{n} \\ &\sim \sqrt{n}\left(\frac{2}{3}n + \frac{1}{2} + \frac{1}{24n} - \frac{1}{1920n^3} + \frac{1}{9216n^5} + \ldots\right) + \zeta\left(-\frac{1}{2}\right). \end{aligned} \tag{7}$$

Tabela 3 ilustruje dokładność powyższego rozwinięcia nawet, gdy wykorzystujemy tylko pierwsze kilka wyrazów. Pogrubione cyfry wskazują pierwsze miejsca, w których wartości przybliżone różnią się od rzeczywistej wartości sumy. Co ciekawe, wzór został wyprowadzony przy założeniu, że n jest „duże”, ale nadal daje dobre wyniki nawet dla $n = 10$, co nie jest wartością szczególnie dużą.

n	$\sqrt{1} + \sqrt{2} + \ldots + \sqrt{n}$	$\sqrt{n}\left(\frac{2}{3}n + \frac{1}{2} + \frac{1}{24n}\right) + z$	$\sqrt{n}\left(\frac{2}{3}n + \frac{1}{2} + \frac{1}{24n} - \frac{1}{1920n^3}\right) + z$
10	22.468278186204100	22.468279829813398	22.46827818**2793784**
100	671.462947103147753	671.46294710**8355978**	671.462947103147645
1000	21097.455887480735355385	21097.455887480751825	21097.455887480735355381

Tabela 3. Porównanie dokładności przybliżeń sumy $S(n)$ przez w zależności od liczby wyrazów uwzględnionych w rozwinięciu (7).

Uogólnienia

Techniki przedstawione w poprzednich sekcjach można łatwo zastosować do znalezienia asymptotycznych wyrażeń dla sum potęg ułamkowych. Na przykład:

$$\sqrt[3]{1} + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3} + \ldots + \sqrt[3]{n} \sim \sqrt[3]{n}\left(\frac{3n}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{36n} - \frac{1}{1944n^3}\ldots\right) + \zeta\left(-\frac{1}{3}\right). \tag{8}$$

Podobnie jak w podejściu przedstawionym wcześniej, pierwszy wyraz, $\frac{3}{4}n^{4/3}$ pochodzi z całki $\int_0^n \sqrt[3]{x}\,dx$. Tak, jak w przypadku sum pierwiastków kwadratowych, ta technika nie pozwala znaleźć ostatniego wyrazu, czyli $\zeta\left(-\frac{1}{3}\right)$, ale wyniki przedstawione w Dodatku umożliwiają jego wyznaczenie. (Dla zainteresowanych czytelników, $\zeta\left(-\frac{1}{3}\right) = -0.2773400478\ldots$.)

To podejście można uogólnić, aby znaleźć sumy innych potęg ułamkowych, a nie tylko w przypadkach, które przeanalizowaliśmy do tej pory. Aby nakreślić metodę, najpierw ustalmy $s > 0$ oraz rozpiszmy sumę:

$$1^s + 2^s + \ldots + n^s \sim n^s \left(\frac{n}{s+1} + \frac{1}{2} + \frac{a_1}{n} + \frac{a_3}{n^3} + \ldots \right) + z.$$

Podobnie:

$$1^s + \ldots + (n-1)^s \sim (n-1)^s \left(\frac{n-1}{s+1} + \frac{1}{2} + \frac{a_1}{n-1} + \frac{a_3}{(n-1)^3} + \ldots \right) + z.$$

Po rozwinięciu drugiej sumy w szereg potęgowy względem $1/n$, różnica tych dwóch sum daje:

$$n^s \sim n^s \left(1 - \frac{(s-1)(s-12a_1)}{12n^2} + \ldots \right).$$

Znowu możemy przyjąć, że współczynniki przy wyrazach wyższych rzędów są równe 0. Stąd widać, że $a_1 = \frac{s}{12}$. Wyznaczenie wyrazów wyższego rzędu jest bardziej skomplikowane algebraicznie, ale końcowy wynik to:

(9)

$$1^s + 2^s + \ldots + n^s \sim n^s \left(\frac{n}{s+1} + \frac{1}{2} + \frac{s}{12n} - \frac{s(s-1)(s-2)}{720n^3} + \frac{s(s-1)(s-2)(s-3)(s-4)}{30240n^5} \right) + z$$

Ponownie, $z = \zeta(-s)$ wynika z rezultatów podanych w Dodatku. Co ciekawe, wyrazy aż do $1/n$ zostały znalezione przez G. H. Hardy'ego przy użyciu metod pochodzących z analitycznej teorii liczb [5].

Wnioski

Od najwcześniejszych etapów nauki szkolnej obliczanie sum jest istotnym elementem zadań matematycznych. Naturalnie rodzaje sum, jakie uczniowie potrafią obliczać, stają się coraz bardziej zaawansowane. Sumy wyrazów ciągu arytmetycznego lub ciągu geometrycznego oraz sumy potęg są często ostatnim przystankiem dla tych, którzy nie zgłębiają rachunku różniczkowego.

Dzięki rachunkowi całkowemu zakres sum, które można obliczyć, znacznie się poszerza. Niniejsza praca pokazuje, jak szeregi Taylora mogą być wykorzystywane do znajdowania sum potęg liczb naturalnych o ułamkowych wykładnikach. Technika ta jest szeroko dostępna dla dużej grupy matematyków i ilustruje nowatorski sposób wykorzystania powszechnych narzędzi do rozszerzenia wyników na sumy, które na pierwszy rzut oka wydają się trudne do oszacowania.

Dodatek: Funkcja dzeta Riemanna

Funkcja dzeta Riemanna, $\zeta(s)$, s jest rzeczywiste, jest zdefiniowana jako suma szeregu

$$\zeta(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^s},$$

który jest zbieżny dla $s > 1$. Definicja ta może zostać rozszerzona analitycznie na wartości zespolone zmiennej s. W kontekście tej pracy istotne są dwa wyniki. Korzystając z formuły sumacyjnej Eulera-Maclaurina [3] oraz metod pochodzących z analitycznej teorii liczb, G. H. Hardy [5] wykazał, że

$$\zeta(s) = \lim_{n\to\infty} \left\{ \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m^s} - \frac{n^{1-s}}{1-s} - \frac{1}{2}n^{-s} + \frac{1}{12}sn^{-s-1} \right\}.$$

To wyrażenie jest poprawne dla dowolnych liczb zespolonych s spełniających warunek $\mathrm{Re}(s) > -3$, z wyjątkiem $s = 1$, gdzie $\mathrm{Re}(s)$ oznacza część rzeczywistą s.

Pokrewny wynik, podany przez Srivastavę i Choi, to

$$\zeta(s) = \lim_{n\to\infty} \left\{ \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m^s} - \frac{n^{1-s}}{1-s} - \frac{1}{2}n^{-s} + \frac{1}{12}sn^{-s-1} - \frac{1}{720}s(s+1)(s+2)n^{-s-3} \right\}.$$

Ten wynik jest poprawny dla $\mathrm{Re}(s) > -5$, również z wyjątkiem $s = 1$, zob. [6].

Sumy rozważane w tym artykule, mają postać $1^s+2^s+\ldots+n^s$, a nie postać $\frac{1}{1^s}+\frac{1}{2^s}+\ldots+\frac{1}{n^s}$, jak w wynikach Hardy'ego oraz Srivastavy i Choi. Jednak podstawiając $-s$ zamiast s do ich wyników, otrzymujemy

$$1^s+2^s+\ldots+n^s \sim n^s\left(\frac{n}{s+1}+\frac{1}{2}+\frac{s}{12n}-\frac{s(s-1)(s-2)}{720n^3}+\ldots\right)+\zeta(-s),$$

co zgadza się z przybliżeniem uzyskanym w (9).

Literatura

[1] David M. Burton, The history of mathematics, an introduction (7th edn.), McGraw-Hill, New York (2011). W 2023 r. ukazał się polski przekład książki Burtona (Wydawnictwo Naukowe PWN SA).
[2] Wolfram Research, Mathematica, version 12.2, (2020).
[3] Carl M. Bender and Steven A. Orszag, Advanced mathematical methods for scientists and engineers, McGraw-Hill (1978).
[4] Richard L. Burden and J. Douglas Faires, Numerical analysis (10th ed.) Cengage (2016).
[5] G. H. Hardy, Divergent series, Clarendon Press (1949).
[6] H. M. Srivastava and Junesang Choi, Zeta and q-Zeta function and associated series and integrals (1st edn.), Elsevier (2012).

Peter Braza pracuje na Uniwersytecie Koloroado.
Artykuł pt. Sums of roots ukazał się w 2023 r. w The Mathematical Gazette (Vol.7, Issue 570).
Autorem polskiego przekładu jest Wojciech Politarczyk.

10.1017/mag.2023.91